

## Symmetrie Problemen

(Symmetrische problemen en problemen in het begrijpen van symmetrie)

Michiel Hazewinkel  
CWI  
POBox 4079  
1009AB Amsterdam

**1. Inleiding.** Het hoofdthema van deze voordracht is symmetrie van meetkundige figuren en ook van meer abstracte mathematische structuren. Veel problemen en vraagstukken in en buiten de wiskunde hebben niet triviale symmetrie ingebouwd. Wat het begrip symmetrie in dezen inhoudt komt verderop ter sprake.

Tot voor kort dachten de wiskundigen en andere wetenschappers dit begrip ‘symmetrie’ adequaat gedefiniëerd te hebben: symmetrie betekent dat er een groep is van transformaties werkend op een collectie van mathematische structuren; en een object uit die collectie heeft niet triviale symmetrie als er niet triviale elementen uit de groep zijn die dat object in zich zelf over voeren (invariant laten). Bijvoorbeeld: de groep kan die zijn van de bewegingen van het Euclidisch vlak en de mathematische structuren die we bekijken kunnen bijvoorbeeld roosters van punten in dat vlak zijn; i.e. één object is het vlak samen met een rooster van punten in dat vlak.

Echter recentelijk is gebleken dat het begrip symmetrie in deze vorm op de helling moet: er zijn allerlei regelmatige/symmetrische structuren die niet gevangen kunnen worden binnen het kader van een groep van transformaties. Dus: ‘symmetrieën zonder groep’. Eén klasse van voorbeelden hiervan komt later in deze voordracht aan de orde: de Penrose werelden; andere voorbeelden zijn de zogenaamde “quantum groepen” (zie bijv.[7]).

Gegeven het feit dat vele natuurlijke vraagstukken symmetrie hebben, lijkt het dus de moeite waard aandacht te besteden aan de vraag in hoeverre en op welke wijze efficiënt gebruik gemaakt kan worden van zulke symmetrie bij het oplossen of bestuderen van zulke vraagstukken. De meeste wetenschappers en leraren, speciaal in de structuur- en natuurwetenschappen, weten op een wat vage manier dat symmetrie en invariantie principes een niet onbelangrijke rol spelen in allerlei situaties. Maar misschien is het toch wel een verrassing te observeren — voor mij zelf was dat indertijd zeker het geval — dat in twee van de belangrijkste tijdschriften in de theoretische natuurkunde, *J. Math. Physics* en *Lett. Math. Physics*, respectievelijk 36% en 54% van de artikelen in 1983 handelden over aspecten van symmetrie. Er wordt dus inderdaad heel wat onderzoek geïnvesteerd in het begrijpen en gebruiken van symmetrie.

In deze voordracht wil ik aandacht besteden aan de volgende aspecten:

- Hebben symmetrische problemen noodzakelijk symmetrische oplossingen?
- Geboorte en sterfte van symmetrie.
- Symmetrie zonder groep.
- Symmetrie en extremaliteit.

Met uitzondering van ‘sterfte van symmetrie’ (beter bekend staande als het ‘breken van symmetrie’), en ‘symmetrie zonder groep’ in het geval van quantum groepen, zijn dit aspecten van symmetrie die nog relatief weinig aandacht gehad hebben, en die vrij snel tot open problemen leiden.

2. **Symmetrische problemen en hun oplossingen.** Er zijn nogal wat functies van meer variabelen, symmetrisch in (een gedeelte van) die variabelen, zodanig dat hun minimum of maximum precies optreedt wanneer al die variabelen gelijk zijn. Enkele voorbeelden volgen.

2.1. Van alle rechthoeken met gegeven omtrek heeft het vierkant het grootste oppervlak.

2.2. Van alle gesloten stuksgewijs gladde krommen van gegeven lengte omvat de cirkel het maximale oppervlak.

(Deze twee ‘problemen’ hebben veel met elkaar te maken; 2.1 is een eindig dimensionale restrictie van het oneindig dimensionale probleem 2.2.)

2.3.  $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \leq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2$ , en gelijkheid treedt op precies dan wanneer  $x_1 = \lambda y_1, x_2 = \lambda y_2, \dots, x_n = \lambda y_n$  voor een zekere  $\lambda$ . Dit is de zogenaamde Cauchy – Schwarz – Bunyakovsky ongelijkheid (Bunyakovskii, 1859; Schwarz, 1884); en dus ten onrechte zo genoemd.

2.4. Voor een gegeven gemiddelde waarde  $\bar{x} = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  treedt het minimum van  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  op wanneer alle  $x_i$  gelijk zijn.

Het lijkt duidelijk dat dit geen toeval kan zijn en dat er wellicht een principe achter schuilt. Zoiets als het volgende. Laten  $f(x_1, \dots, x_n)$  en  $g(x_1, \dots, x_n)$  twee symmetrische functies zijn en bekijk het probleem van het maximaliseren of minimaliseren van  $f(x_1, \dots, x_n)$  onder de restrictie  $g(x_1, \dots, x_n) = c$ . Dan geldt voor de oplossing dat  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Het is niet onnatuurlijk te denken dat dit principe zonder meer waar is, en zo af en toe is er nog wel hier en daar in de literatuur een uitspraak te vinden van het type: “By symmetry considerations it follows that ...”, waarmee dan een al dan niet ware versie van dit principe aangeroepen wordt.

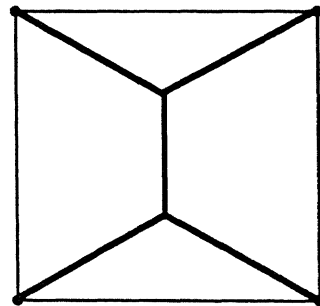
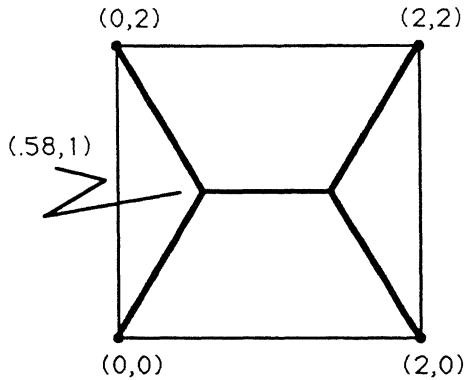
In [10] introduceert Waterhouse de naam ‘Purkiss principle’ voor zulke principes en hij bewijst daar een correcte versie (en een generalisatie). Een correcte versie van het Purkiss principe kan als volgt geformuleerd worden.

**Purkiss principle.** Laten  $f$  en  $g$  symmetrische functies zijn met continue tweede afgeleiden in een omgeving van een punt  $P = (r, r, \dots, r)$ . Zij  $V$  de verzameling

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) : g(x_1, \dots, x_n) = g(P)\}$$

Dan heeft de functie  $f$  op  $V$  een lokaal extremum in  $P$  behalve in gedegeneerde gevallen.

(Die gedegeneerde gevallen zijn precies beschreven.)



In zijn algemeenheid is het Purkiss principe zeker niet waar. De hoofd moeilijkheid zit hem in het woord ‘lokaal’. Een beroemd tegenvoorbeeld is het volgende: gegeven vier steden

gelocaliseerd op de vier hoekpunten van een vierkant; wat is het kortste wegennet dat ze alle vier verbindt?

De oplossing is aangegeven in de twee tekeningen op de vorige bladzijde. Merk op dat de oplossing minder symmetrisch is dan het probleem zelf; om dat te compenseren zijn er twee oplossingen en “samen hebben ze de complete symmetrie van het oorspronkelijke probleem”.

Een gedetailleerd bewijs dat de aangegeven oplossing inderdaad de optimale is valt buiten het kader van deze voordracht. Een begin kan gemaakt worden door alle wegennetten te bekijken van de vorm aangegeven in de figuur hieronder. Een eenvoudige berekening geeft dat de totale lengte van dit wegennet gelijk is aan

$$4\sqrt{1+x^2} + (2-2x)$$

en het minimum daarvan wordt aangenomen voor

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577.$$

Het eerste tegenvoorbeeld tegen het Purkiss principe in de algemene vorm is afkomstig van Bunyakovskii (dezelfde van de ongelijkheid). Zijn voorbeeld betreft de functie

$$f(x, y) = [x^2 + (y-1)^2][(x-1)^2 + y^2]$$

die zijn minimum aanneemt in de punten (1,0) en (0,1) in plaats van in een punt waar  $x = y$ . Nog een ander voorbeeld wordt gegeven door de familie van functies

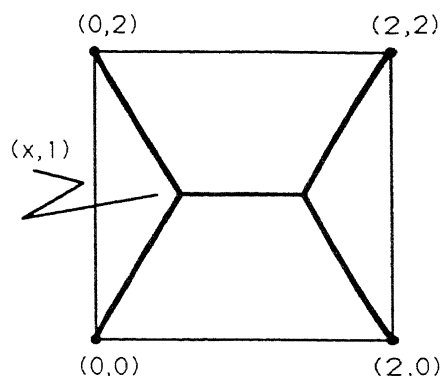
$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - \lambda)^2$$

voor waarden van  $\lambda$  tussen een half en 1.

Er is overigens een goede reden waarom deze eenvoudigste voorbeelden minstens van graad vier zijn: voor graad drie en lager is het Purkiss principe waar (Bunyakovskii).

Ik ben bekend met twee redenen waarom symmetrische problemen soms niet even symmetrische oplossingen hebben. De eerste is ‘bifurcaties’, of te wel de geboorte en dood van symmetrieën terwijl een parameter verandert. Die theorie laat uitstekend zien, waarom in het laatste voorbeeld het Purkiss principe werkt voor  $\lambda$  kleiner dan een half en daarna mis gaat. Dit is het onderwerp van de volgende sectie. In die sectie wordt ook duidelijker waarom voor polynomiale tegenvoorbeelden graad vier of hoger nodig is: voor het type bifurcatie waarbij een maximum (of minimum) verdwijnt zijn minstens drie oplossingen van de stationariteits conditie “afgeleide is nul” nodig.

Een tweede reden waarom symmetrie kan verdwijnen ligt in rand conditie voorwaarden: als de rand condities, voor bijv. differentiaal vergelijkingen, niet even symmetrisch zijn als de vergelijking zelf, dan is het logisch dat de symmetrie gebroken raakt. Maar het begrip rand voorwaarden is algemener dan dat en in sectie 5 hieronder, extremaliteit en symmetrie, hoop ik daarop terug te komen. Als voorbereiding daarop is het misschien goed om alvast op te merken



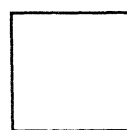
dat veel van de voorbeelden boven ook een iets ander principe illustreren: optimale configuraties tenderen hoog symmetrisch te zijn! Dat is het echt centrale onderwerp van sectie 5.

**3. Geboorte en sterfte van symmetrie.** In deze sectie bekijken we wat er kan gebeuren met de symmetrie groep van een structuur of patroon terwijl het (langzaam) verandert in afhankelijkheid van één of meer parameters. We beginnen met wat voorbeelden.

3.1. *Symmetrie van rechthoeken.* Bekijk een rechthoek met zijden 1 en  $\lambda$ . Als  $\lambda \neq 1$  dan wordt de symmetrie groep voortgebracht door de twee reflecties over de horizontale en verticale as, en de symmetrie groep is de zogenaamde “vier-groep van Klein”, bestaande uit de identiteit, de twee genoemde reflecties, en de samenstelling van die twee reflecties als vierde element. Echter, op het moment dat  $\lambda$  gelijk aan 1 wordt, wordt de symmetrie groep groter en er verschijnt het symmetrie element van een rotatie over 90 graden. Voor die waarde van  $\lambda$  is de symmetrie groep de groep  $D_4$  van acht elementen (die de vier-groep van Klein omvat als een deelgroep).

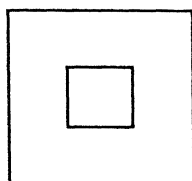


Symmetrie groep  
 $Z/2 \times Z/2$

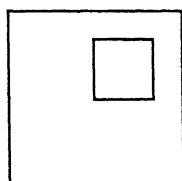


Symmetrie groep  
 $D_4$

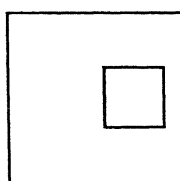
3.2. *Symmetrie van twee vierkanten.* Als een tweede voorbeeld bekijk een klein vierkant in een groter met parallelle zijden, zoals hieronder afgebeeld. In het geval dat het kleine



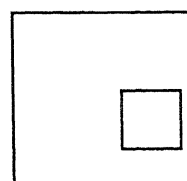
(a)



(b)



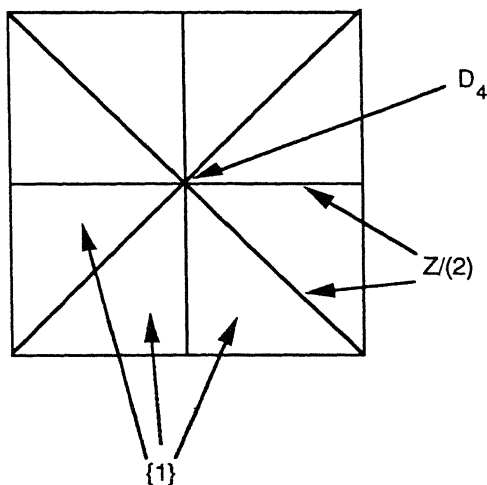
(c)



(d)

vierkant precies in het midden is van het grote hebben we weer een symmetrie groep  $D_4$ .

Dit is de situatie in het geval (a) hierboven. Als het centrum van het kleine vierkant niet in het midden maar op één van de twee diagonalen van het grote vierkant ligt dan is de enige symmetrie een reflectie met die diagonaal als symmetrie as. Dat is geval (b) hierboven. Ligt het centrum van het kleine vierkant op de horizontale of verticale symmetrie as van het grote (geval (c)), dan is de situatie analoog en er is een symmetrie groep  $Z/2$ . Tenslotte, als het centrum van het kleine vierkant noch op één van de diagonalen, noch op één van de symmetrie assen van het grote vierkant ligt, is er geen niet



triviale symmetrie. De situatie wordt dus geheel bepaald door de positie van het centrum van het kleinere vierkant en kan weergegeven worden zoals hierboven.

Beide deze voorbeelden geven het volgende beeld. Laat de parameter langzamerhand veranderen. Dan kan het gebeuren dat de symmetrie groep na enige tijd groter wordt; echter in een klein genoeg omgeving van een gegeven punt is de symmetrie groep nooit groter dan in dat punt, maar het kan wel degelijk gebeuren dat in de onmiddellijke omgeving van een punt de symmetrie groep reduceert tot een kleinere. Dus “plotselinge” verkleining kan, maar plotselinge vergroting niet. Dit is precies het beeld van het “breken van symmetrie” dat intuïtief juist lijkt en dat veel gebruikt wordt in de natuurkunde. Er is ook een mathematische stelling die zegt dat onder zekere condities dit het juiste beeld is. Echter voordat ik die tracht te formuleren is het goed te preciseren wat bedoeld wordt met de phrase “symmetrie van een mathematisch object”.

3.3. *Het begrip “groep van symmetrie”*. Het intuïtieve idee is als volgt. Er is een groep van potentiële symmetriën en de elementen daarvan kunnen toegepast worden voor het transformeren van een mathematische structuur. Die elementen van de potentiële groep van symmetriën die een gegeven structuur invariant laten zijn symmetriën van die structuur. In het geval van voorbeeld 3.2 hierboven zijn de potentiële symmetriën de starre bewegingen van het platte vlak, reflecties, en combinaties daarvan; de mathematische structuur bestaat uit een paar vierkanten in dat vlak. Laten we een grotere groep van symmetriën toe als potentiële kandidaten dan kan de symmetrie groep van een object gemakkelijk groter worden.

Het mathematische plaatje is als volgt. Er is een groep  $G$  (de groep van potentiële symmetriën), die werkt op een verzameling  $M$  (de verzameling van mathematische objecten van de soort die we aan het bekijken zijn; in het geval van voorbeeld 3.2 bestaat  $M$  uit alle paren vierkanten van gegeven groottes parallel binnen elkaar). De phrase “werkt op” betekent dat er een afbeelding  $G \times M \rightarrow M$  is, die met  $(g, m) \mapsto gm$  genoteerd wordt, zodanig dat  $1m = m$ , en  $g(hm) = (gh)m$ . De *isotropie groep* van een element  $m \in M$  is de ondergroep

$$G_m = \{g \in G: gm = m\}$$

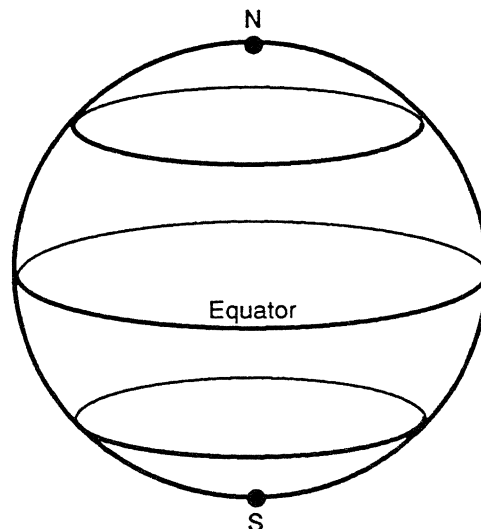
en dat is dus de symmetrie groep van (de mathematische structuur)  $m$ .

Voor het formuleren van preciese uitspraken later zijn nog een paar extra begrippen in deze context nuttig. Een verzameling  $M$  met een werking van  $G$  op zoals boven heet kortweg een  $G$ -verzameling. Twee  $G$ -verzamelingen  $M_1$  en  $M_2$  heten *isomorph* als er een bijectieve afbeelding  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  is zodat  $\alpha(gm) = g\alpha(m)$ . De *baan* van een element  $m$  in een  $G$ -verzameling  $M$  is de deel  $G$ -verzameling

$$Gm = \{gm: g \in G\}$$

Een *stratum* in  $M$ , tenslotte, is de vereniging van alle banen van hetzelfde isomorphie type.

Het één en ander kan goed geïllustreerd worden met het volgende voorbeeld, hierboven afgebeeld. De verzameling  $M$  is de bol en de groep  $G$  is de groep van alle rotaties over de



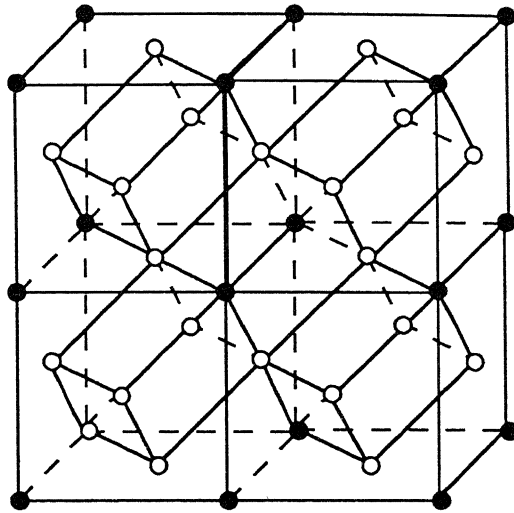
Noord – Zuid as samen met inversie in het centrum van de bol. De banen zijn de verenigingen van twee parrallel cirkels op respectievelijk gelijke noorder en zuider breedte. Er zijn drie strata. Namelijk de vereniging van de noordpool en de zuidpool, de equator, en de hele rest.

3.4. *Het breken van symmetrie.* Met het nu opgebouwde begrippen apparaat kan de volgende stelling geformuleerd worden.

**Stelling, [9].** Zij  $G$  een compacte Lie groep die glad werkt op een compacte gladde variëteit  $M$ . Dan is er voor alle  $m \in M$  een open omgeving  $U$  van  $m$  zodat voor alle  $m'$  in  $U$  de symmetrie groep  $G_{m'}$  bevat is in de symmetrie groep  $G_m$  van  $m$  (op geconjugeerde na).

Hierbij zijn twee ondergroepen  $N_1$  en  $N_2$  van  $G$  geconjugerd als er een element  $g$  van  $G$  is zodat  $N_1 = g^{-1}N_2g$ .

Dit is dus precies zo'n stelling als verwacht kan worden op basis van de voorbeelden 3.1 en 3.2 die we tot nog toe bekeken hebben. De stelling in deze vorm is maar een begin. Er zijn erg veel natuurlijke situaties waarin aan de voorwaarden niet voldaan is. Bijvoorbeeld de verzameling  $M$  kan singulariteiten hebben; de groep  $G$  is vaak niet compact of zelfs maar eindig dimensionaal, ... Het is echter zoiets als een 'folk theorem' dat een zelfde stelling ook waar is voor de situatie van een Euclidische groep van bewegingen werkende op mogelijke kristal structuren; dat wil zeggen een euclidische ruimte met daarin een eindige of oneindige discrete collectie van punten gespecificeerd die ook nog een eindig aantal verschillende kleuren kunnen hebben, zoals het hierboven



geïllustreerde "face-centered cubic lattice". Echter een echt hard bewijs van zo'n stelling schijnt in de literatuur nog niet voorhanden te zijn. In zijn algemeenheid is het principe: "voldoende kleine veranderingen kunnen alleen maar resulteren in minder symmetrie" zeker niet waar. In [6] beschrijf ik twee tegenvoorbeelden. Het lijkt er op dat er in het algemeen twee soorten symmetrie zijn die een rol kunnen spelen: 'design symmetry' en 'generic symmetry'. De eerste soort is degene waar hierboven aandacht besteed is (en in die situaties is de tweede soort niet aanwezig). De tweede soort is van geheel ander type en treedt op in situaties waarbij de meeste exemplaren van een mathematische structuur een niet triviale symmetrie hebben die in speciale gevallen kan verdwijnen. Een voorbeeld hiervan treedt op bij het bekijken van  $n$ -dimensionale algebras over de complexe getallen die (als algebra) door één element voortgebracht worden. Die zijn van de vorm  $\mathbb{C}[X]/f(X)$ , waarbij  $f(X)$  een polynoom is van de graad  $n$ . Als nu dit polynoom  $n$  verschillende wortels heeft dan is de automorphismen groep van de algebra (en dat is de symmetrie groep in deze situatie) gelijk aan de groep  $S_n$  van alle permutaties van  $n$  letters. Echter als twee of meer wortels samen vallen dan zijn niet meer alle wortels van hetzelfde type en een gedeelte van deze symmetrie groep verdwijnt.

In het geval van drie dimensionale algebras (ook algemenere dan de net besprokene) is de situatie geheel uitgezocht in [6]. In dat geval treden er twee tegengestelde verschijnselen op: onder voldoende kleine deformaties neemt de 'design' symmetrie groep af (of blijft gelijk) en de 'generic' symmetrie groep groeit (of blijft gelijk).

Of zoiets algemeen waar is is nog volledig open; er is nauwelijks onderzoek naar gedaan.

**3.5. Bifurcaties en symmetrie.** Bifurcatie theorie houdt zich bezig met het bestuderen van vergelijking die afhangen van een parameter en meer speciaal met de vraag hoe de verzameling van oplossingen kan veranderen als de parameter(s) zich wijzigen. Samen met enkele van de beschouwingen hierboven levert dit het gereedschap voor het begrijpen van wat er mis kan gaan met het Purkiss principe.

Als illustratie kan weer het probleem dienen van het vinden van de maxima van de functie

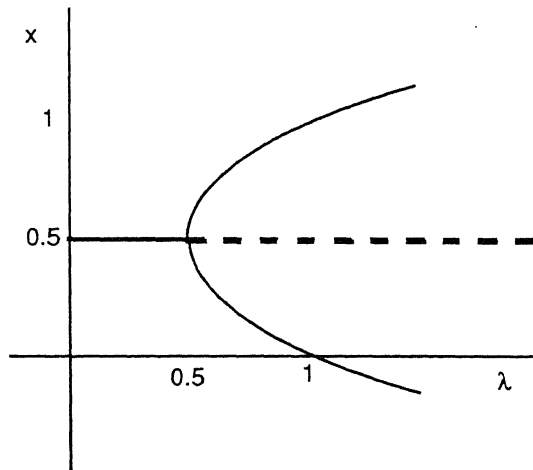
$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - \lambda)^2$$

onder de nevenvoorwaarden

$$x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

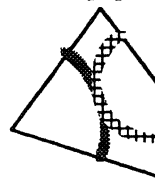
Substitueer  $y = 1 - x$  en neem de afgeleide naar  $x$  om de stationaire punten te vinden. In afhankelijkheid van  $\lambda$  resulteert het plaatje hiernaast. Er is altijd een stationair punt voor  $x = 1/2$  en voor  $\lambda$  kleiner of gelijk

aan  $1/2$  is dit het enige stationaire punt en het is een maximum; zodra  $\lambda$  voorbij een  $1/2$  gaat zijn er drie stationaire punten: twee die met maxima corresponderen en één,  $x = 1/2$ , die een minimum representeert

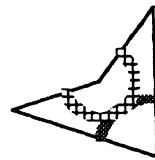


**4. Symmetrie zonder groep.** Zoals ik al in de inleiding opmerkte is er regelmaat (of te wel symmetrie) in een aantal situaties zonder dat daar een groep bij hoort. Er zijn verschillende manifestaties van dit verschijnsel, zeker niet allen van hetzelfde type (voor zover we nu kunnen zien). In deze sectie wil ik aandacht besteden aan één ervan, de zogenaamde Penrose universa of te wel Penrose betegelingen van het platte vlak, voornamelijk van uit het gezichtspunt van hun symmetrie eigenschappen. Voor een (recreationele) inleiding tot de Penrose tegels zie [5], en voor de algebraïsche theorie ervan zie [1,2].

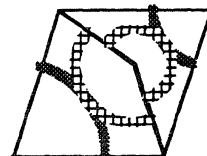
De twee Penrose tegels, althans in hun meest bekende vorm —er zijn oneindig veel variaties— zijn de volgende: een vlieger en een pijl zoals hiernaast afgebeeld. De vlieger heeft hoeken van 72, 72, 72, en 144 graden, en de pijl heeft hoeken van 72, 36, 216, en 36 graden. De vlieger en de pijl passen samen tot een ruit met een scherpe hoek van 72 graden. Ze zijn echter van cirkel



Kite (vlieger)



Dart (pijl)

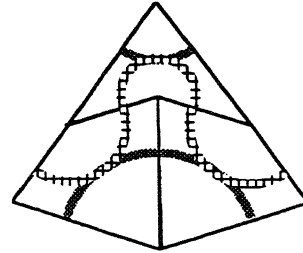


bogen voorzien (met stralen van  $r$ ,  $1$ , en  $1/r$  als de lange zijden lengte  $1+r$  hebben, waarbij  $r$  gelijk is aan de gouden snede lengte  $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ), precies om aan te geven dat deze twee tegels bij het maken van een betegeling van het hele vlak juist niet op deze wijze samen gevoegd mogen worden.

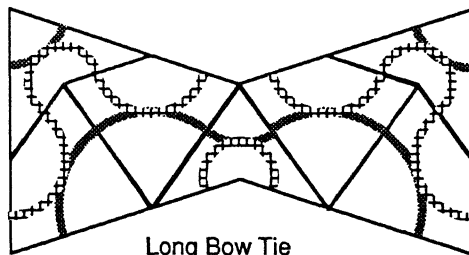
De bedoeling is nu met behulp van deze twee tegels een betegeling van het hele platte vlak te maken op zo'n manier dat de twee verschillend "gekleurde" bogen op iedere tegel op elkaar aansluiten. Hierbij is een betegeling van het vlak door middel van een aantal tegels een volledige overdekking van het vlak met die tegels zodat de tegels elkaar niet overlappen (behalve hun randen). Drie kleine stukjes patroon die telkens weer terug komen zijn hiernaast en hieronder afgebeeld. Op de volgende bladzijde is een stuk van het zogenaamde 'cartwheel' patroon weergegeven.

Het is inderdaad mogelijk het hele vlak op deze manier te betegelen. Deze Penrose betegelingen hebben de volgende eigenschappen.

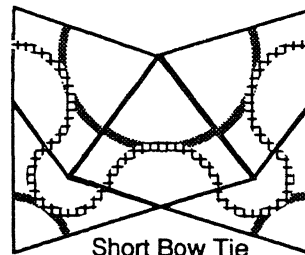
- (1) Elke betegeling is niet periodisch



Ace (Aas)



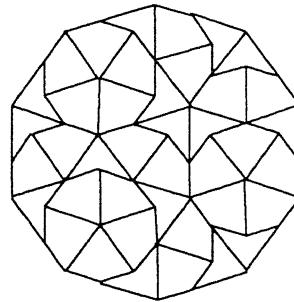
Long Bow Tie  
(Lange strik)



Short Bow Tie  
(Korte strik)

- (2) Er zijn over aftelbaar verschillende betegelingen.

(3) Neem een eindig gebied in een van deze betegelingen van diameter  $D$ , en een willekeurige andere (of dezelfde) betegeling en een punt daarin. Dan is er binnen een radius van  $2D$  van het gegeven punt in de tweede betegeling een exacte kopie te vinden van het eerste gekozen gebied. Dat betekent dus dat alle Penrose universa lokaal niet van elkaar te onderscheiden zijn, hoewel ze globaal verschillend zijn. Dit is een symmetrie eigenschap die niet zonder meer te vangen is binnen het kader van een groep werkend op een verzameling.



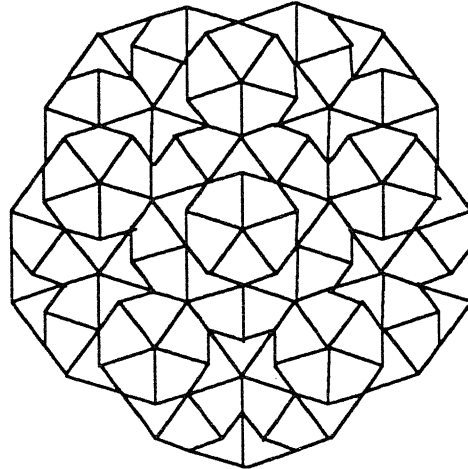
Cartwheel

Het is natuurlijk bekend dat het onmogelijk is het platte vlak te betegelen met regelmatige pentagons of überhaupt met tegels die een orde vijf symmetrie element toelaten. Daaruit is de conclusie getrokken dat crystal structuren met een orde vijf symmetrie niet zouden kunnen bestaan. Ze bestaan echter wel degelijk ('quasi-crystals'), en de Penrose universa, die een sterke neiging hebben tot vijf- en tienvoudige symmetrie, vormen een mogelijk theoretisch model daarvoor. Dat de Penrose universa een sterke neiging tot vijfvoudige bijna symmetrie hebben is te zien aan het zon patroon hieronder en speciaal aan het 'cartwheel' patroon op de daarop volgende twee bladzijden. Met uitzondering van het centrale cartwheel heeft dat patroon een perfecte vijfvoudige rotatie symmetrie. De vijfvoudigheid neiging spreekt ook uit de hoeken



die optreden (36 en 72 graden) en uit de volgende eigenschap.

(4) Elk punt ligt binnen een 'cartwheel', zo bestaat bijvoorbeeld het "zon patroon", of althans het stuk dat hiernaast is afgebeeld uit vijf overlappende cartwheels. In de afbeeldingen op de volgende bladzijden zijn een aantal cartwheels met een wat vettere lijn aangegeven

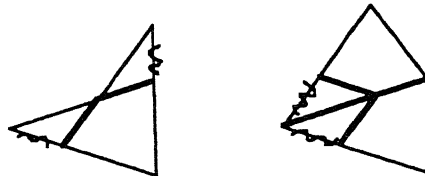


Zon patroon

De sleutel tot deze eigenschappen ligt in nog verdere symmetrie eigenschappen van de Penrose universa. Dit zijn "schalings symmetrie eigenschappen zoals je ook voorkomen bij de zogenaamde fractalen. Ze heten 'inflatie' en 'deflatie' en werken als volgt.

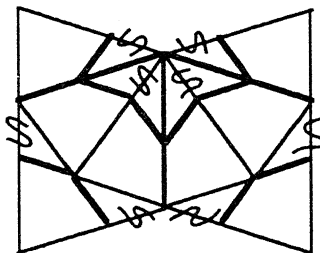
Voor deflatie van een Penrose patroon doet men het volgende. Verleng de korte zijden van elke pijl op de hiernaast aangegeven wijze en verwijder de stukjes van de lange zijden bij de vleugels van de pijl; ook zoals aangegeven.

Elke vlieger wordt in tweeën gedeeld en twee extra lijntjes worden toegevoegd en twee andere lijnstukjes weggehaald, zoals ook hiernaast aangegeven. Op deze manier levert elke pijl een kleinere vlieger en twee halve kleinere pijlen en elke vlieger levert twee kleinere vliegers en ook

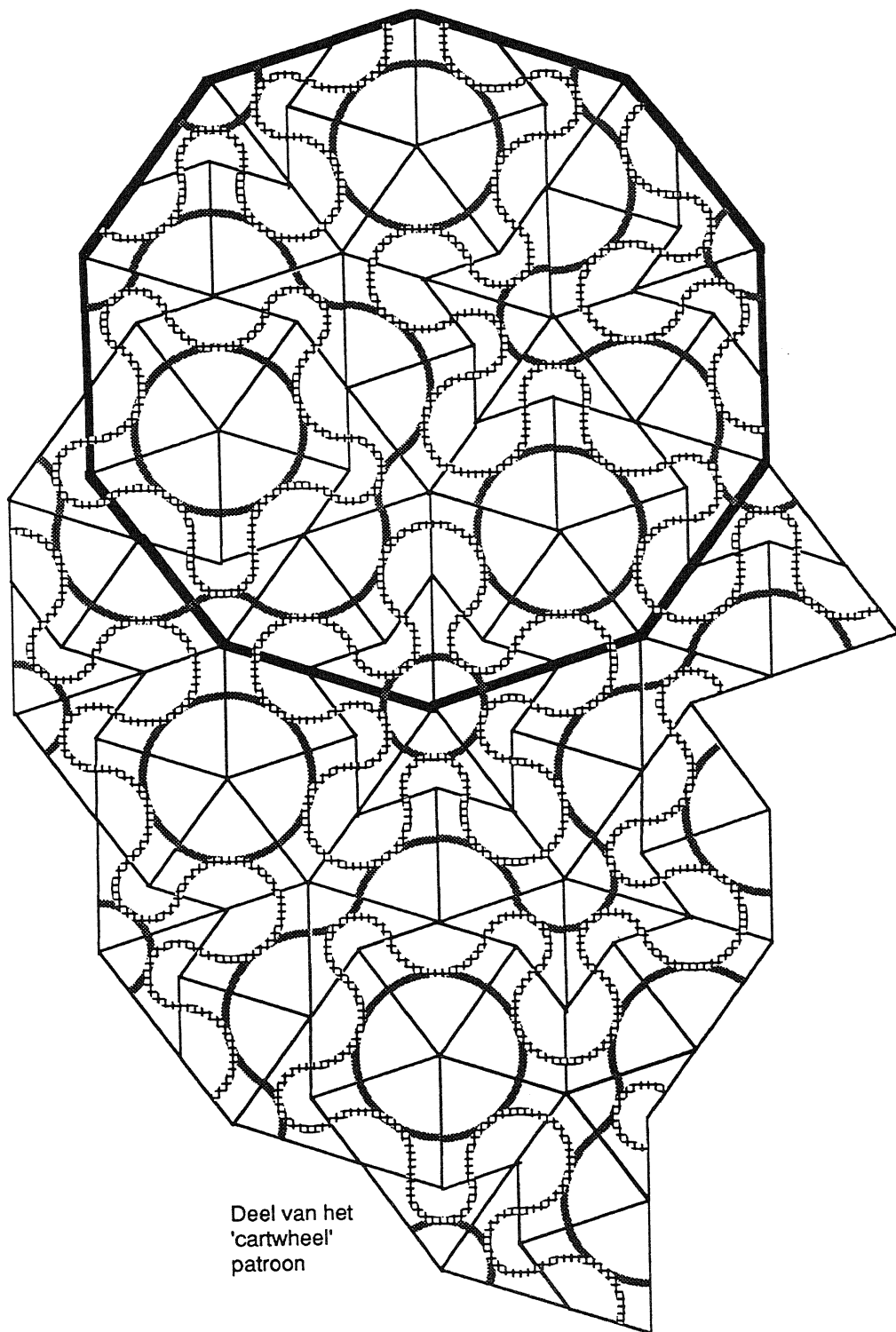


twee halve pijlen. Het is nu eenvoudig na te gaan dat als vliegers en pijlen tegen elkaar aanliggen volgens de betegelings voorschriften van een Penrose universum, dat dan al die halve pijlen samen hele pijlen vormen en dat zo een nieuw Penrose patroon ontstaat met kleinere vliegers en pijlen. De schaal factor is —onvermijdelijkerwijze— natuurlijk weer de gouden ratio. Voor de kleine strik is hiernaast te zien hoe deflatie werkt.

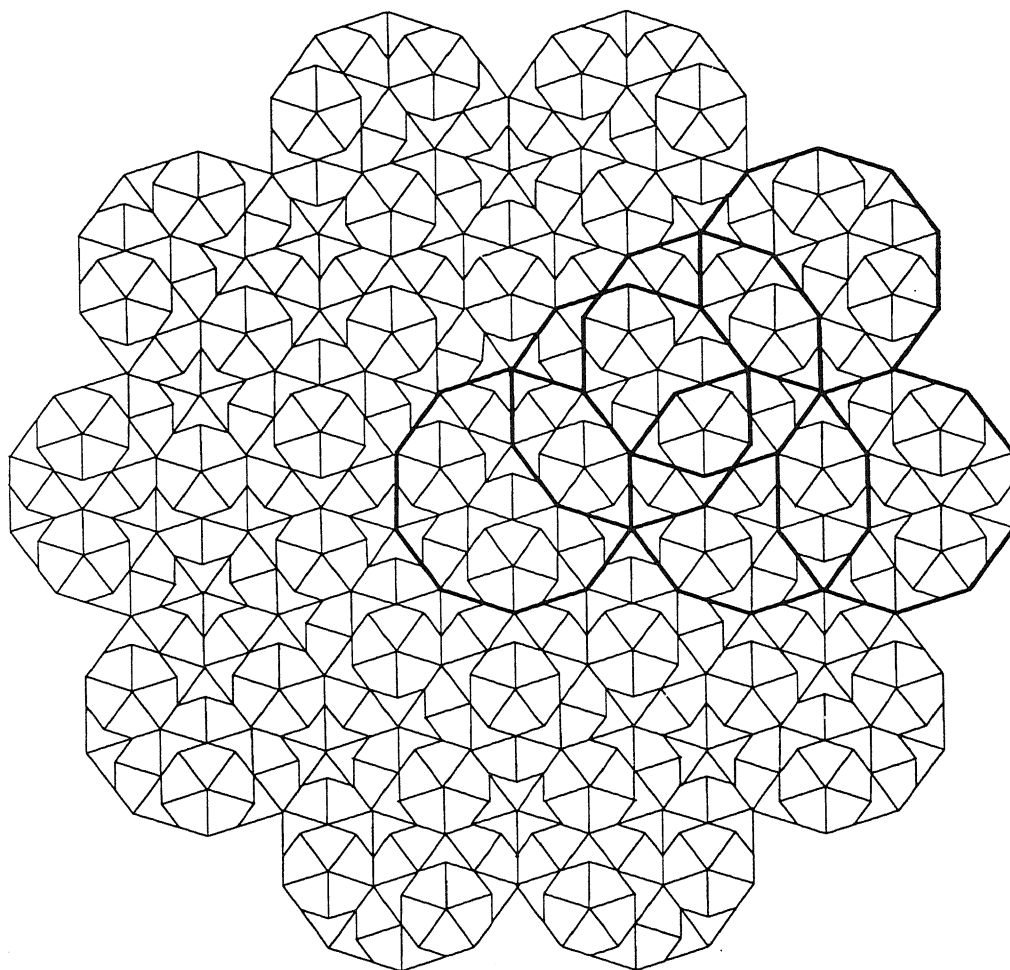
Inflatie is de omgekeerde bewerking: verdeel elke pijl in twee helften en lijm korte zijden van de vliegers en halve pijlen aan elkaar om een nieuwe Penrose betegeling te krijgen met gouden ratio grotere tegels.



**5. Symmetrie en extremaliteit.** Elke keer dat het Purkiss principe werkt, en hoewel dat, zoals we gezien hebben, niet altijd het geval is, is dat toch vaak genoeg om interessant te zijn, hebben we een voorbeeld dat een extremale oplossing hoog symmetrisch is. De rand voorwaarden, in het geval van sectie 2 dus de nevenconditie  $g(x_1, \dots, x_n) = c$  kunnen dat bederven als die niet even symmetrisch zijn. Toch zijn in de praktijk de optimale oplossingen vaak nog bijna hoog symmetrisch; bijvoorbeeld "symmetrisch in het midden maar naar de rand toe moeten wat aanpassingen gedaan worden om aan de rand condities te voldoen. Zoiets treedt



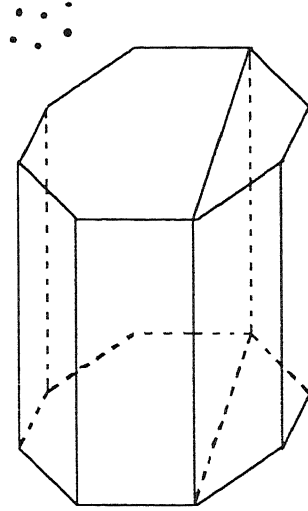
Deel van het  
'cartwheel'  
patroon



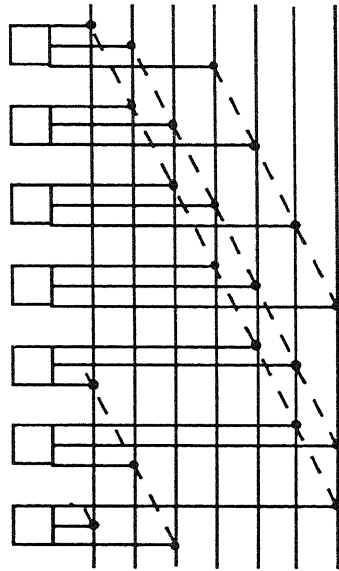
Het 'cartwheel' patroon

bijvoorbeeld op bij optimale groeipaden voor een economie ('tumpike' stellingen; zie [7] voor wat meer details en referenties). Het is ook, weer in de praktijk, niet ongebruikelijk om bij het ontwerp van een groot systeem te beginnen met sterk symmetrische configuraties. Maar het kan ook zijn dat dat gedaan wordt omdat je toch ergens moet beginnen en anders de keuze mogelijkheden helemaal niet te overzien zijn. Hieronder wil ik proberen drie voorbeelden van extremum problemen te beschrijven en iets te zeggen over in hoeverre deze het principe "extremaliteit impliceert symmetrie" illustreren. Meer details en referenties zijn te vinden in [7].

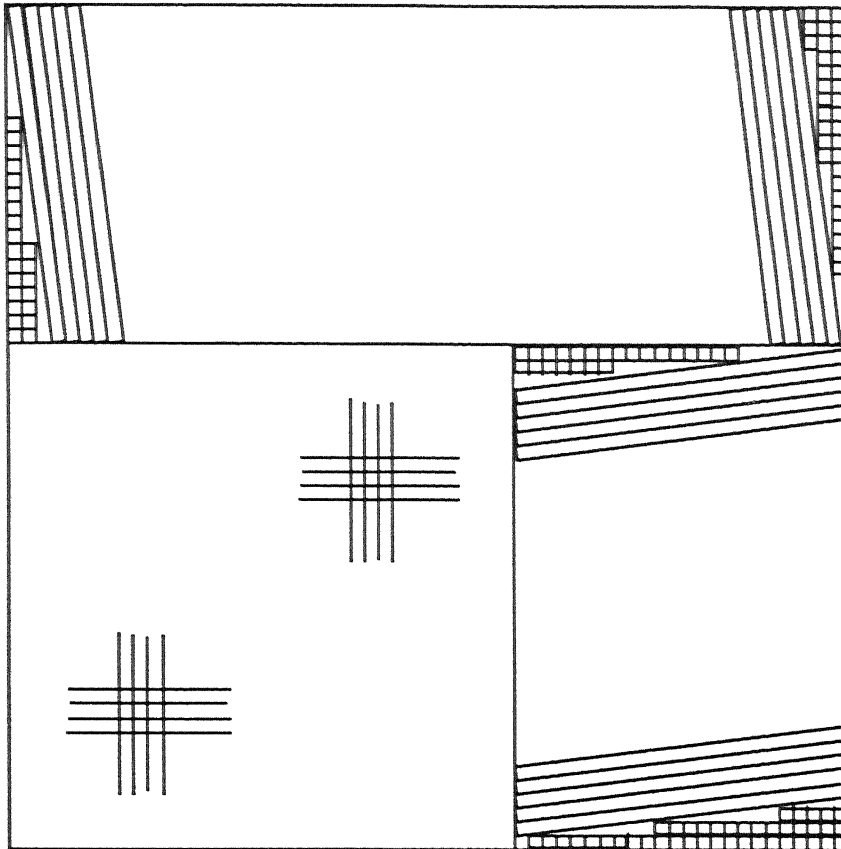
5.1. *Systemen van deelverzamelingen.* Bekijk een eindige verzameling  $X$  en een collectie van deelverzamelingen  $\mathcal{F}$ , zodat twee elementen uit  $\mathcal{F}$  of disjunct zijn of precies  $r$  elementen gemeen hebben (waarbij  $r$  een van te voren gegeven getal is). Voor voldoende grote verzamelingen  $X$  ziet de oplossing er als volgt uit [4]. Schrijf  $X$  als een disjuncte vereniging  $X = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{\lfloor n/r \rfloor} \cup S_0$ , waarbij ieder van de verzamelingen  $S_i$  precies  $r$  elementen heeft en waar  $\lfloor n/r \rfloor$  het grootste gehele getal is kleiner of gelijk aan  $n/r$ . Een maximale verzameling van deelverzamelingen  $\mathcal{F}$  bestaat nu uit alle disjuncte verenigingen  $S_i \cup S_j$  en de één-elementen deelverzamelingen van  $S_0$ . De symmetrie van de situatie kan als volgt graphisch geïllustreerd worden. Teken een regelmatige  $k$ -hoeks cylinder, waarbij  $k = \lfloor n/r \rfloor$ . De verticale ribben stellen de verzamelingen  $S_i$  voor; verder zijn er een aantal losse punten, in de figuur hierboven zijn die links boven aangegeven. De verzamelingen uit  $\mathcal{F}$  zijn nu de losse punten en de verticale diagonale vlakken (in de figuur is er daar één van getekend). De randverschijnselen die de perfecte symmetrie van de oplossing verstoren worden hier gerepresenteerd door de losse punten. Deze oplossing werkt alleen voor groot genoeg verzamelingen  $X$ ; voor kleine verzamelingen treedt nog een ander randverschijnsel op: namelijk nog betere oplossingen met nog veel meer symmetrie.



5.2. *Shift registers.* We stellen ons het probleem een aantal chips zo te verbinden met 'bussen' dat elke cyclische permutatie van de inhoud van de chips in één schrijf-lees operatie kan geschieden. Het is duidelijk dat daar minstens even veel bussen voor nodig zijn als chips; modulo die restrictie proberen we het aantal 'pins' te minimaliseren (want die zijn duur). Voor zeven chips en zeven bussen ziet de optimale oplossing er uit zoals getekend in de figuur hiernaast. Mathematisch gesproken zit hier een zogenaamde 'verschil verzameling' achter. Die bestaan niet voor alle natuurlijke getallen — voor  $n \leq 100$  alleen voor  $n = 3, 7, 13, 21, 31, 57, 73, 91$  — en dat geeft weer aanleiding tot randverschijnselen in de vorm van redelijk symmetrische oplossingen met hier en daar wat geknoei.



5.3. *Optimaal pakken van vierkantjes.* Zij gegeven een groot vierkant van zijde  $\alpha$ . De bedoeling is nu in dit vierkant zoveel mogelijk eenheids vierkantjes te pakken. Als  $\alpha$  een natuurlijk getal is is er geen probleem. Als  $\alpha$  geen natuurlijk getal is dan resulteert de voor de hand liggende rechthoekige methode in een lineair verlies van  $2nr + r^2$  als  $\alpha = n + r$ ,  $r \in (0,1)$ . De vraag is of het beter kan en dat is (voor grote  $\alpha$ ) inderdaad het geval. Het basis idee van Erdős en Graham [3] bestaat er uit het grote vierkant te verdelen in een kleiner vierkant van



gehele grootte  $\lfloor \alpha - \alpha^p \rfloor$  en twee rechthoeken, waarbij  $p \in [0,1]$ . Het kleinere vierkant wordt op de natuurlijke wijze volgepakt en de twee rechthoeken hoofdzakelijk met iets scheefstaande kolommen vierkantjes. Als deze truc één keer toegepast wordt is de optimale waarde  $p = 2/3$  en in plaats van een lineair verlies in  $\alpha$  verkrijgt men zo asymptotisch een verlies kleiner dan  $11\alpha^{2/3}$ . Erdős en Graham herhalen essentieel dezelfde truc nog een keer (in een veel moeilijker situatie) en bereiken asymptotisch een verlies kleiner dan  $C\alpha^{7/11}$ . Of deze oplossing optimaal is is onbekend. Interessant, naar mijn smaak, is dat ook hier weer randverschijnselen optreden, en dat hoewel de rand in absolute zin steeds groter wordt, hij naar verhouding met de grootte van het grote vierkant steeds kleiner wordt.

5.4. Tot besluit van deze paragraaf nog een positief resultaat uit [9] wat betreft het principe "extremaliteit impliceert symmetrie

**Stelling.** Zij  $G$  een compacte Lie group glad werkend op een gladde compacte variëteit  $M$ ; laat  $\mathcal{F}$  de verzameling zijn van alle  $G$ -invariante functies op  $M$ . Als in een baan geïsoleerd ligt in zijn stratum dan is die baan kritiek voor alle  $f \in \mathcal{F}$ . En omgekeerd als een baan kritiek is voor alle invariante functies dan ligt die baan geïsoleerd in zijn stratum.

Ik ken twee systematisch optredende verschijnselen die het principe "extremaliteit impliceert symmetrie" kunnen verstoren: bifurcaties en randverschijnselen. Beiden zijn hierboven voor gekomen. Of er nog andere systematische storings mechanismen zijn weet ik niet; iets van een bewijs van het principe is ook nog ver weg. Er is nog heel veel te doen in de wereld van symmetrie.

### Bibliographie

1. N G de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. I*, Indagationes Math., 43(1981), 39 - 52.
2. N G de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. II*, Indagationes Math., 43(1981), 53 - 66.
3. P Erdős, R L Graham, On packing squares with equal squares, J. Comb. Theory A 19 (1975), 119 -123.
4. Z Füredi, *Set systems with prescribed cardinalities for pairwise intersections*, Discr. Math. 40(1982), 53 - 67.
5. Martin Gardner, *Extraordinary non-periodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January 1977(1977), 110 - 121.
6. Michiel Hazewinkel, *Symmetry, bifurcations, and pattern formation (d'après Sattinger, Michel, Thom, and many others)*. In: M Hazewinkel, R Jurkovich and J Paelinck (ed.), Bifurcation analysis, Reidel, 1985, 210 -232.
7. Michiel Hazewinkel, *Applied algebra*, CWI report Jan. 1991.
8. M Hazewinkel, *Introductory recommendations for the study of Hopf algebras in mathematics and physics*, CWI Quarterly, 1991.
9. Louis Michel, Applications of group theory to quantum physics, Lect. Notes in Physics, 6(1970), 36 - 143.
10. William C Waterhouse, Do symmetric problems have symmetric solutions, Amer. Math. Monthly, 90:6(1983), 378 - 397.